第 6 回　進行距離と速度

1　学習のポイント

17 世紀、物理学者や一部の数学者たちは物体の運動に興味を持っていた。物体の自然落下の問題はその中でも単純な問題で、ガリレイのピサの斜塔の話は有名である。

t を時刻 (単位は秒とする) とし、落下距離を $s(t)$ とする (単位を m とする) と、だいたい

$$s(t) = 4.9t^2 \tag{1}$$

となることが実験的に明らかにされた。この時、例えば「$t = 1$ での速度はいくらか?」と言うような問題を彼らは考えたはずである。ここではニュートンが辿ったと思われる思考の軌跡に沿って我々も考えてみよう。

1.1　進行距離から進行速度を求める

物体の時刻 t での速度 (速さ) は、進行距離を進行に要した時間で割って求める。進行距離が式 (1) で与えられるときに、時刻 $t = 1$ では進行距離は$\boxed{}$、時刻 $t = 1.1$ では進行距離は$\boxed{}$であるから、時刻 $t = 1$ と時刻 $t = 1.1$ の間に$\boxed{}$だけ進んだことになる。従って、この測定時間の間での速度はおおよそ$\boxed{}$であると結論づけることができよう。

つまり時刻 $t = 1$ での速度 (速さ) を求めるのに、次の計算を行ったことになる。

$$v(1) \approx \frac{s(1.1) - s(1)}{1.1 - 1}$$

ここでの記号 $\approx$ は「近似的に」の意味である。近似的である理由は、測定に要した時間が 0.1 秒の大きさだからである。正しく求めるには測定に要した時間を 0 に近づけなくてはならない。つまり

$$v(1) = \lim_{h \to 0} \frac{s(1 + h) - s(1)}{h} \tag{2}$$

とする必要がある。

問い 1　式 (2) に基づいて $v(1)$ を計算せよ。

式 (2) を見て分かるように、速度とは、横軸に時刻 t、縦軸に進んだ距離 $s(t)$ を描いたグラフの傾きである。ここでは $t = 1$ での傾きを求めたわけである。つまり時刻 t における速度 $v(t)$ は $s(t)$ を (t で) 微分する事によって得られる。

ニュートンは $s(t)$ を時刻 t で微分することを

$$v(t) = \dot{s}(t) \tag{3}$$

のように、点を付けて表した[1]。これはライプニッツの記号を使うと

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} \tag{4}$$

と同じ事である。

問い 2 微分公式を使って $v(t)$ を導出せよ。この事から $v(1)$ を求めてみよ。(ヒント: 微分公式は x を使って表されていたが、ここでは x が t に置き換わっているだけである。)

1.2 原始関数

逆に、速度 $v(t)$ を与えて $s(t)$ を求める。これは**微分の逆問題**である。すなわち何を微分すれば $v(t)$ となるのかと言う問題である。

例題 1

$$\dot{s}(t) = 9.8t$$

となる $s(t)$ にはどのようなものがあるか、例を挙げなさい。

その答えは無数に存在する。例えば

$$s(t) = 4.9t^2 \tag{5}$$

はもちろん、

$$s(t) = 4.9t^2 + 3 \tag{6}$$

もそうである。一般に、C を任意の定数として

$$s(t) = 4.9t^2 + C \tag{7}$$

が答えになる。C は $t = 0$ における $s(t)$ の値 $s(0)$ を表している。つまり最初にどこに居たのかを表しているので、**初期値**と言う[2]。

問い 3 微分して t^2 となる関数 $s(t)$、すなわち

$$\dot{s}(t) = t^2$$

となる $s(t)$ にはどのようなものがあるか、例示しなさい。

[1] この記法は現在でも物理学で広く使われている。

[2] 関数 $s(t)$ が t 秒間における進行距離を表している限り $s(0)$ は 0 である。しかし、$s(t)$ が座標を表していれば、出発点が原点でない限り、一般には $s(0)$ は 0 ではない。

1.3 速度から進んだ距離を求める

問い 4 A さんは 4 時間の散歩をした。最初の 1 時間は時速 3 キロで、次の 1 時間は時速 5 キロで、そして残りの 2 時間は時速 4 キロで。A さんが歩いた距離はいくらか?

これは易しい問題であるが、深みのある問題でもある。横軸に経過時間 t を、縦軸に進行速度 $v(t)$ をとり、グラフを書くと図 1 のようになる。A さんが歩いた距離は灰色の部分の面積である。

この問題では速度の変化は階段状であるが、そうでない場合 (図 2 のような場合) についても、歩いた距離は面積に等しいのではないかと推測される。このような洞察は大きな発見につながるのである。

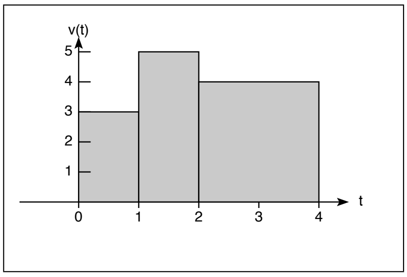

図 1: 散歩の速度と進行距離

問い 5 この推測を正当化する論拠を考えなさい。

例題 2 速度が $v(t) = t$ となる時、$t = 0$ で出発したとして、それから 1 秒間に進んだ距離を求めなさい。

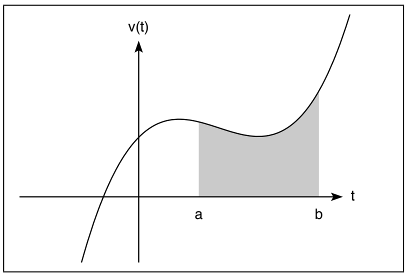

図 2: 速度と進行距離の関係
時刻 a から b までの進行距離は図の灰色の面積となる?

この問題に関しては今や我々は 2 通りの解法を知っている。

- 面積を求める。図 3 で $v(t) = 1$、$a = 0$、$b = 1$ と置けばよい。このとき三角形の面積は 1/2 となり、それが答えである。
- $v(t) = t$ の原始関数 $s(t)$ すなわち
$$\dot{s}(t) = t$$
となる $s(t)$ を求める。このような $s(t)$ は
$$s(t) = \frac{1}{2}t^2 + C$$
の形をしている。$s(0) = 0$ のはずであるから $C = 0$ である。従って $s(1) = 1/2$ として答えが得られる。

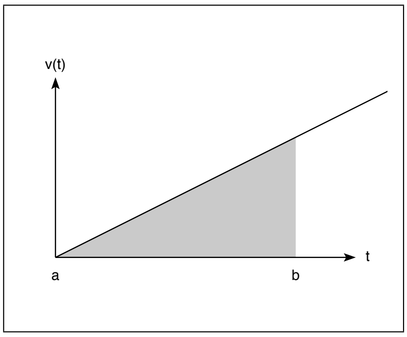

図 3: 時間に比例する速度と進行距離

問い 6 速度が $v(t) = t^2$ となる時、1 秒後の進行距離を原始関数によって求めなさい。このことから $v(t)$ が描く放物線の区間 $0 \leq t \leq 1$ の面積について結論を出しなさい。

ニュートンはライプニッツと共に微分積分法の発見者と言われている。ここでは「積分」の言葉は使っていないが、事実上、微分積分法の本質的な問題を扱っているのである。