第 5 回　　微分法

1　学習のポイント

前回の講義で関数 $f(x)$ の $x = a$ での傾きを知るには

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

を計算すれば良い事を知った。これを $x = a$ での微分係数と言い、$f'(a)$ で表す事が多い。a を x で置き換えたものを $f(x)$ の導関数と言い $f'(x)$ で表す事が多い。$f(x)$ から導関数 $f'(x)$ を求める事を**微分する**と言う。

> 導関数のいろいろな書き表し方: $y = f(x)$ に対して
>
> $$f'(x) \qquad y' \qquad \frac{dy}{dx} \qquad \frac{df}{dx} \qquad \frac{d}{dx}f(x)$$
>
> d を使う書き方はライプニッツ (Leibniz) の偉大な発明である。この d は単独に何かの量を表しているのではなく、単なる記号である。この記号の威力はもっと高度な問題の中で発揮される。

2　微分規則

以下に簡単な関数、すなわち $f(x) = x^n$ の形の関数について、それを微分した結果を示す。

$f(x)$	1	x	x^2	x^3	$\cdots$	x^n
$f'(x)$	0	1	$2x$	$3x^2$	$\cdots$	nx^{n-1}

表 1: x^n の導関数

微分の計算法を例に依って示す。

$$\begin{aligned}
(2x^3 - 5x^2 + 7x + 3)' &= (2x^3)' - (5x^2)' + (7x)' + (3)' && (1)\\
&= 2(x^3)' - 5(x^2)' + 7(x)' + 3(1)' && (2)\\
&= 2\times 3x^2 - 5\times 2x + 7\times 1 + 3\times 0 && (3)\\
&= 6x^2 - 10x + 7 && (4)
\end{aligned}$$

ここで行われたのは微分演算の次の性質である[1]。

[1]微分演算の線形性

- 式 (1) の変形: 項別に微分ができる。つまり足し算や引き算は微分記号の外に出してもよい。
- 式 (2) の変形: 定数は微分記号の外に出してもよい。

問い 1 関数 $f(x) = x^2(1 - x)$ を微分せよ。

例題 1 関数 $f(x) = x^2(1 - x)$ について、x の範囲が 0 から 1 の範囲で、$f(x)$ を最大にする x の値と、その時の $f(x)$ の値を求めなさい。

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めると

$$f'(x) = 2x - 3x^2 = x(2 - 3x)$$

となる。これより、$f'(0) = 0$、$f'(2/3) = 0$ であり、$f'(x) = 0$ となる x において、$f(0) = 0$、$f(2/3) = 4/27$ である。また $f'(x)$ は $0 < x < 2/3$ で正、$x < 0$ または $x > 2/3$ の範囲で負である。この結果を次のように表で示すと分かりやすい。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2/3	$\cdots$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4/27	$\searrow$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

この表から $0 < x < 1$ の範囲で $f(x)$ には唯 1 つの最大値が存在し、それは $x = 2/3$ のときの 4/27 であることか分かる。

問い 2 関数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ について、x の範囲が 0 から 3 の範囲で、$f(x)$ を最大にする x の値と、その時の $f(x)$ の値を求めなさい。

3 極大と極小

$f'(x) = 0$ となる所は、極大または極小である。

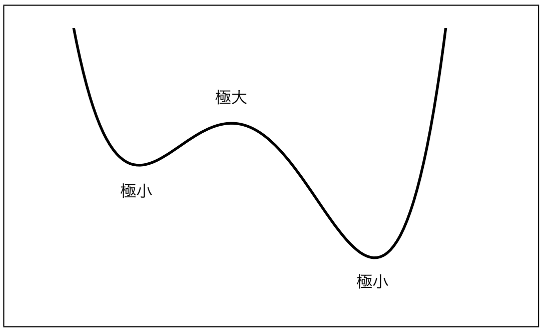

図 1: 極大と極小

問い 3 このグラフは左右で無限に上方に伸びている。このグラフに最大値は存在すると思うか? 最小値の場合はどうか?