第4回　接線

1　学習のポイント

接線とは何であろうか?

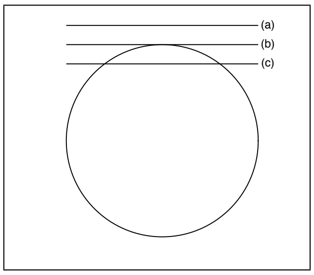

図 1: 円の接線

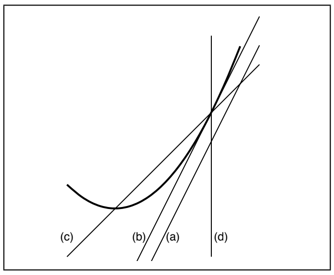

図 2: 放物線の接線

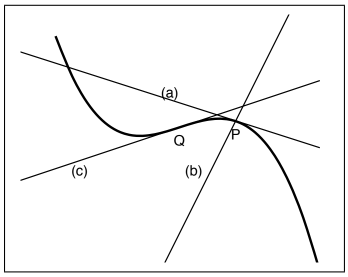

図 3: 3 次曲線の接線

ギリシャ時代に発展したユークリッドの幾何学では円と直線のみを扱う。この場合には「接線」の定義は簡単明瞭で、「円と 1 点のみを共有する直線」で構わなかった (図 1)。

ところが数学者達が円以外の曲線を扱いだすとユークリッド流の素朴な定義は破綻する。図 2 に放物線の例を示す。直線 (d) は放物線とは 1 点しか共有しないが、これは接線とは考えたくない直線である。このような例に対して当時の数学者達が困惑した事は想像に難くない。

さらに複雑な曲線になると、共有点の個数による接線の定義の破綻はいっそう明瞭になる。図 3 において直線 (a) も (c) も接線であると考えたいのである。数学者達は「接する」とは大域的な性質ではなく、局所的な性質であると悟るに至った。そしてそこから微分学が生まれた。

曲線上の点 P と少し離れた曲線上の点 Q を考える (この図では見やすくするために離しすぎている)。Q を P に近づけていくと、PQ を結ぶ直線が、我々が接線であると考える直線に近づいていく事が分かるであろう。

現在では「接線」はこの考えに基づいて定義される。 (点 P で曲線が滑らかであれば。)

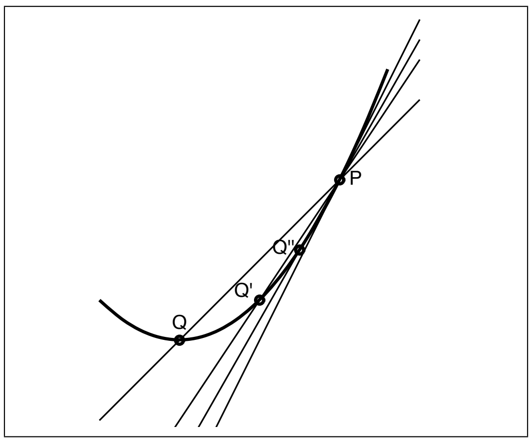

図 4: 接線の定義

2　課題

放物線

$$y = x^2$$

の $x = 1$ での接線の傾きを求める。

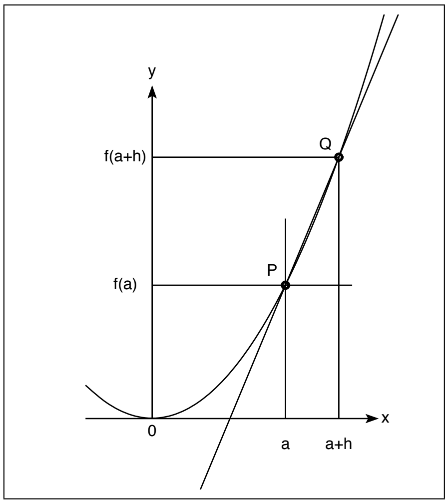

図 5: $y = x^2$ のグラフと点 P$(a, f(a))$ と点 Q$(a+h, f(a+h))$ を結ぶ直線
この図は $a = 1$ となっている。

問い 1 関数 $f(x) = x^2$ について、いくつかの
h、例えば 0.1、0.01、0.001 について

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

を計算してみなさい。

h	$f(1+h)$	$f(1)$	$f(1+h) - f(1)$	$(f(1+h) - f(1))/h$
0.1	1.21	1	0.21	2.1
0.01				
0.001				

さて、この計算は $(f(1+h) - f(1))/h$ を計算しやすいように変形してやると、もっと簡単になる。

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = 2 + h$$

h	2	$2+h$
0.1	2	2.1
0.01		
0.001		

ここでは h は正の実数をとりながら 0 に近づけたが、負の実数をとりながら 0 に近づけても同じ結果になることは容易に分かる。

ここでは $x = 1$ の場合に限って計算したので、1 ではない場合、例えば $x = 2$ のところで接線の傾きを知りたい時には計算をやり直さなくてはなりません。それはとても不便です。この

不便はつぎのようにすれば解消できます。a に何か数値をイメージしてください。例えば 1 とか 2 とか何でもよい。そこで $x = a$ として同様な計算を行うと

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = 2a + h$$

となる。このことから $x = a$ の時には $2a$ に近づくことが分かる。これから $x = 2$ での傾きは 4 であることが直ちに分かる。

問い 2 関数 $f(x) = x^3$ の $x = a$ での接線の傾きを求めなさい。その結果から $x = 0$ での傾き、$x = 1$ での傾き $x = 2$ での傾きを出しなさい。
ヒント 次の公式で $b = h$ として考えなさい。

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

3 極限、微分、導関数

この問題では h が 0 に近づいた時の $(f(a+h) - f(a))/h$ の行き着く先を求めました。数学記号を使うと、ここで求めたものは

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

で表されます。これを $f(x)$ の $x = a$ における**微分係数**と言います。$f(x) = x^2$ の場合。$x = a$ での微分係数は $2a$ です。a を x で置き換えた $2x$ を x^2 の**導関数**とも言います。「微分係数」と言うときには何か具体的な数値がイメージされています。だからその結果は数値です。それに対して、導関数と言うときには結果が関数である事が強調されています。

問い 3 $f(x) = x^2(1 - x)$ の導関数を求め、この関数の $x = 1$ での傾きを出しなさい。また傾きが 0 となる x の値を求めなさい。

実は導関数の導き方には簡単な規則が存在し、それを利用するともっと容易に求まります。それは次回の講義で、...

4　補足問題

問い 4　関数 $f(x) = 3x^2 - x^3$ について $x = a$ における微分係数を求めるために次の計算をした。

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\{3(a+h)^2-(a+h)^3\}-(3a^2-a^3)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3(a+h)^2-3a^2}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^3-a^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\boxed{}}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{3a^2h+3ah^2+h^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\boxed{} - \lim_{h\to 0}\{3a^2+3ah+h^2\} \\
&= \boxed{} - 3a^2
\end{aligned}
$$

この計算の $\boxed{}$ の中を埋めなさい。

問い 5　関数 $f(x) = x^2(1-x)$ において、以下の 11 個の x の値における $f(x)$ の値と、その微分係数を求めなさい。*(次の表を埋める事)*

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$f(x)$ の値	0	0.009	0.032	0.063							
$f(x)$ の導関数	0	0.17	0.28	0.33							