第3回　アルキメデスの発見

1　学習のポイント

放物線 $y = x^2$ と x 軸と $x = 1$ の直線で囲まれた面積が厳密に求まり、それが 1/3 となる理由を理解する。

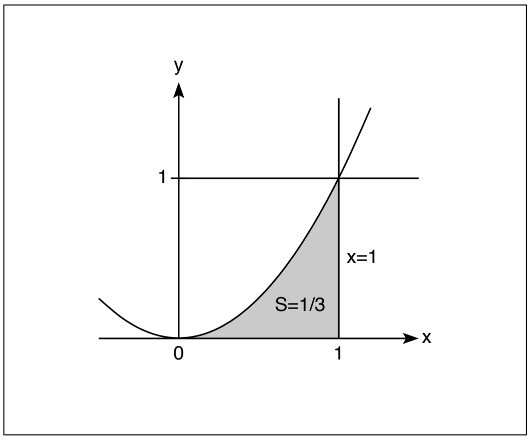


図 1: $y = x^2$ のグラフとその面積

2　課題

区間を 5 分割して内測度と外測度を計算する。

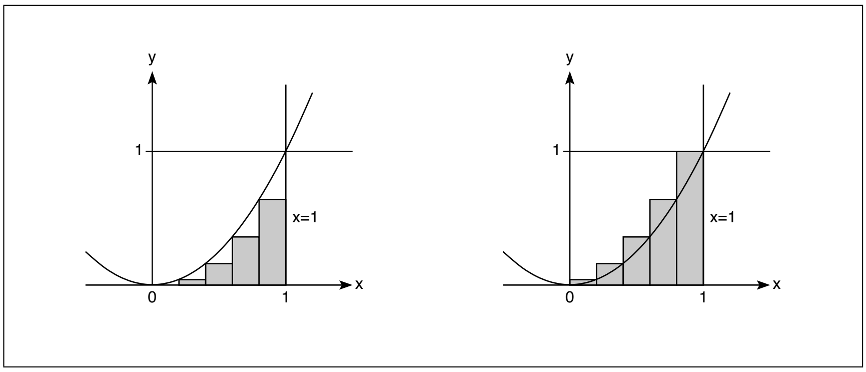


図 2: 左: 内測度、右: 外測度

- 5 分割内測度: $(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)/5^3$
- 5 分割外測度: $(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2)/5^3$
- (5 分割外測度) − (5 分割内測度): 1/5

問い 1 5 分割と 10 分割の場合について、各々の内測度と外測度を計算せよ。そのために s_n を

$$s_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

で定義すると、n 分割の外測度は s_n/n^3、内測度は $s_n/n^3 - 1/n$ である。次の表の空欄を埋めよ。

n	s_n	$1/n$	s_n/n^3	$s_n/n^3 - 1/n$
10				
20				

なぜ s_n/n^3 は n が大きくなると 1/3 に近づくのか? 次の公式を使えば理由は簡単であるが ...

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + n &= n(n+1)/2 && (1) \\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 &= n(n+1)(2n+1)/6 && (2) \end{aligned}$$

式 (1) は易しいが、式 (2) は難しい (というか面倒)。そこで、幾何学的なアプローチをとる。底辺が 1、高さが 1 のビラミッドの体積は 1/3 である。これは幾何学的に証明できる。

次の図はビラミッドを水平に 5 つに切り、灰色の部分はその内測度を示す。

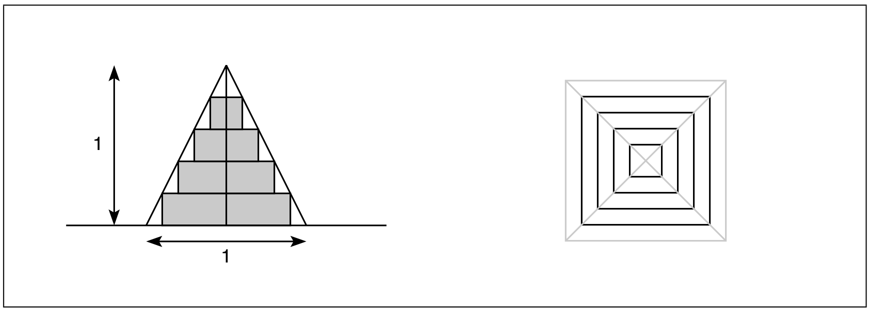


図 3: ピラミッドの内測度。左: 側面図、右: 上面図

問い 2 この図の灰色の部分の体積は $(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)/5^3$ で与えられる事を示せ。

式 (3) の証明のヒント

$$\begin{aligned} n^3 - (n-1)^3 &= 3n^2 - 3n + 1 \\ \cdots &= \cdots \\ 3^3 - 2^3 &= 3 \times 3^2 - 3 + 1 \\ 2^3 - 1^3 &= 3 \times 2^2 - 3 \times 2 + 1 \\ 1^3 - 0^3 &= 3 \times 1^2 - 3 \times 1 + 1 \end{aligned}$$

この両辺を相い加えると

$$n^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) - 3(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + n$$

が得られる。これと式 (1) を利用しながら整理する。

3　補足

3.1　ピラミッドの体積

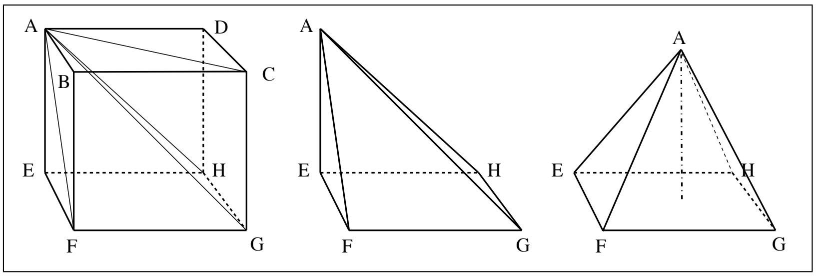


図 4: 左: 正 4 面体の 3 分割。中央: その内の 1 つ、右: ピラミッド形

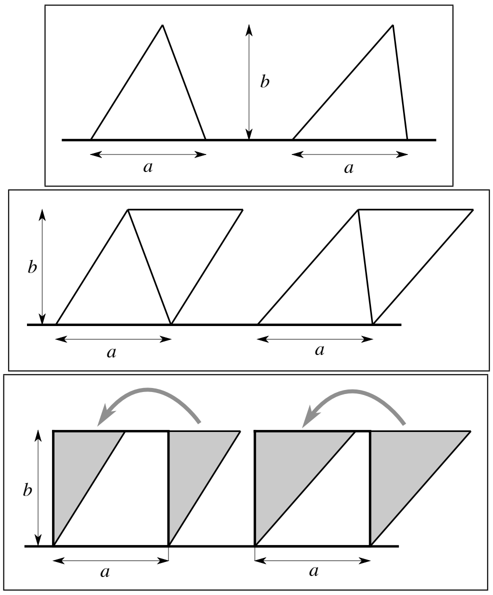
3.2　三角形の面積

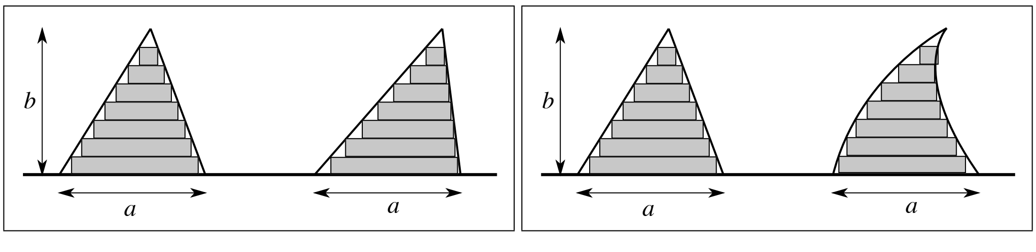
三角形の面積は、

$$\frac{1}{2} \times \text{底辺の長さ} \times \text{高さ}$$

であることは習ってきたと思う。右図に、この公式がどのように得られるか、底辺の長さと高さが共に同じ 2 つの三角形を並べながら示す。共に、最終的には同じ形の長方形の問題に還元されるのが理解できると思う。

しかしこの考え方はピラミッドの問題に対して旨くいかない。そこで他の考え方を下図に示す。このアプローチの利点は三角形の問題だけではなく、もっと豊富な問題に適用できる事にある。面積の問題だけではなく、体積の問題に対しても同様に考える事ができるはずである。





4　問題

問い 3 次の和公式

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 \quad = \quad n(n+1)(2n+1)/6$$

を $n=1$、$n=2$、$n=3$ および $=4$ の場合について正しい事を、左辺と右辺に同じ n の値を代入して確認せよ。

n	1	2	3	4
左辺				
右辺				

問い 4 放物線 $y=x^2$ の $0 \le x \le 1$ の区間を n 分割する場合について、各々の内測度と外測度を計算したい。そのために s_n を

$$s_n = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$$

で定義すると、n 分割の外測度は s_n/n^3、内測度は $s_n/n^3-1/n$ である。次の表の空欄を埋めよ。

n	s_n	$1/n$	s_n/n^3	$s_n/n^3-1/n$
10				
20				
100				

問い 5 なぜ s_n/n^3 は n が大きくなると 1/3 に近づくのか?

$$\frac{s_n}{n^3} = \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n}) \tag{3}$$

となる事を利用し、ここに $n=100$ を代入して計算してみよ。その経験から n が非常に大きい場合に、この式が 1/3 になることを説明せよ。

問い 6 底辺の長さが 1、高さが 1 のピラミッドを水平に 5 つに切ると、その内測度が $(1^2+2^2+3^2+4^2)/5^3$ で与えられる事を示せ。

5　答案を見て

5.1　問い 5 の答案から

$n = 100$ の計算では

$$\frac{1}{6}(1 + 0.01)(2 + 0.01) = \frac{1}{6} \times 1.01 \times 2.01 = 0.33835$$

となる。しかし最後の数字を見ていても n にもっと大きな数字を入れた場合に、この計算が 1/3 に近づく理由が見えてこないのである。計算をすると本質が雑多な数値の中に隠れてしまうことが多い。これもそのような例である。

5.2　問い 6 の答案から

ピラミッドを水平に 5 つに切ってできる辺の大きさをを図 5(左) に示す。生成される 4 つの正方形の辺の長さが 1/5、2/5、3/5、4/5 であることか分かりにくいので考え込まなくてはならないであろう。しかしこれらの正方形を左下に寄せ集めると図 5(右) になるのであるが、これだと直ぐに分かる。でも本当に右図は 4 つの辺が元の正方形を 5 等分しているのか? この疑

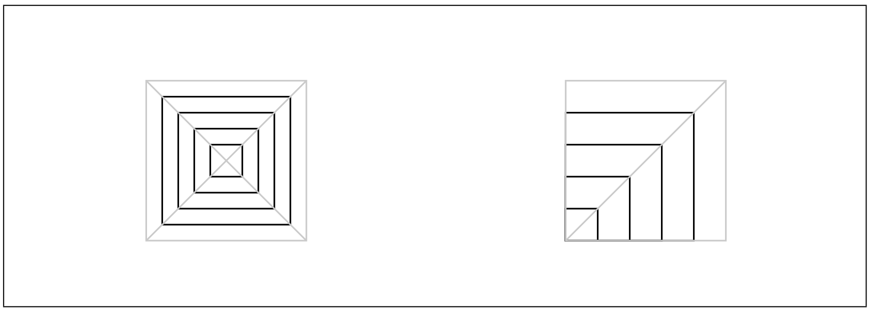


図 5: 上面図: ピラミッド (左) を水平に 5 つに切ってできる辺の大きさ

問に答えるために側面図を図 6 に示す。ところで図 5 および図 6 の右の図は、実は 1 辺の長さ

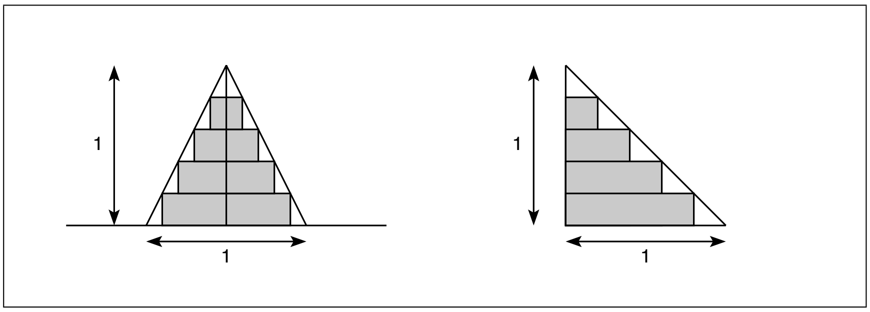


図 6: 側面図: ピラミッド (左) を水平に 5 つに切ってできる内測度

が 1 の立方体を 3 つの同じ形に分割したときにできる角錐であることに注意せよ。