第 2 回　関数のグラフを書く

1　学習のポイント

- **関数:** y が x の関数であるとは、x の値によって y が定まる仕組みが存在すること。この仕組みを $f(x)$ で書く事が多い。この場合 $y = f(x)$ と書く[1]。$f(x)$ としては計算式が与えられる事が多い。また x として実数値[2]が想定される事が多い。

- **関数のグラフ:** $y = f(x)$ を満たす点 (x, y) の集まり。

2　課題

- $y = x^2$

- $y = x^2(1 - x)$

例題 1 $y = x^2$ のグラフをできるだけ大きく、また正確に方眼紙に書きなさい。x の範囲は -0.5 から 1.5 とする。

> **ヒント**
>
> - いろいろな x について y を計算し、どの点を通るかを調べる。
> - このグラフは滑らかな曲線になる[a]。
>
> [a] 1 個の計算式に依って定義される大抵のグラフは滑らかな曲線になる。滑らかにならないグラフを探す方が難しい。

例えば、x の値を 0.1 刻みで -0.5 から $+1.5$ までの 21 個について y を計算して、$y = x^2$ の曲線が通る 21 個の点を求めて、それらを滑らかに結んでいけばよい。結果は図 1 のようになる。

[1] ほかに $g(x)$ や $h(x)$ など、x を丸い括弧で括って書き表される。
[2] 長さや体積や重さなどを測定したときに得られる数で、一般には小数点を含み、また負の数も許す。

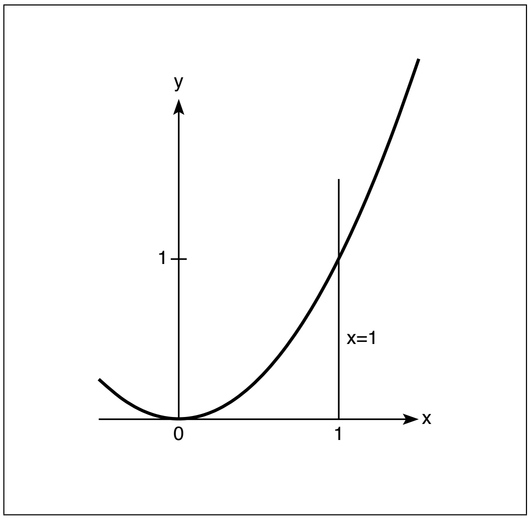

図 1: $y = x^2$ のグラフ

問い 1 この曲線と、x 軸と、$x = 1$ の直線によって囲まれる面積はいくらだろうか? また、この曲線の $x = 1$ における傾き[3]はいくらだろうか? 現在のところこれらを正確に求める方法を教えていないので、予想するだけで良い。

問い 2 同様にして、$y = x^2(1 - x)$ のグラフを描け。但し x の範囲は -0.5 から 1.5 とする。このグラフは x が 0 と 1 の間に最大値を持つ。この時の x の値はどれほどであろうか? 小数点以下 3 桁まで求めなさい。またこのグラフと x 軸とで囲まれる面積はどれほどであろうか予測せよ。さらに $x = 1$ でのこの曲線の傾きはどれほどであろうか予測せよ。

現在のところ、これらを正確に求める方法を教えていません。これらを明らかにするのは微積分学の基本的なテーマです。

グラフが滑らかか否かの判断はグラフを書く上で重要です。滑らかにならない初等的な例には次のようなものが挙げられます。

- x の値に応じた場合分けが発生する場合。場合分けの場所で滑らかにならない。

$$y = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0 \\ -1 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

- 計算式が分母を持つ場合。分母が 0 になる場所で滑らかにならない。

$$y = 1/x$$

[3] $x = 1$ で接する直線の傾き

3　補足

3.1　傾きとは何だろう?

直線の傾きは図 2 の b/a で定義される。(この図では 1/2 に描かれている。)

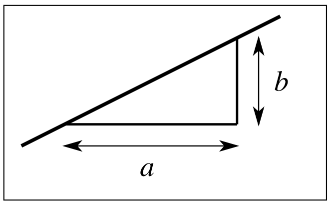

図 2: 直線の傾きの定義

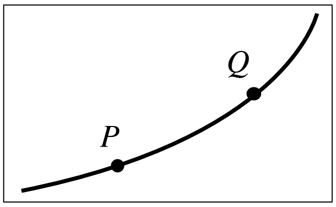

図 3: 場所に依って傾きが異なる

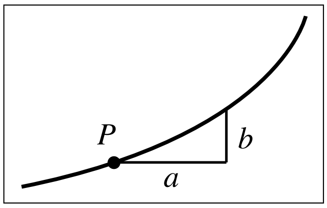

図 4: a によって b/a が異なる

曲線の場合には図 3 に例示されるように傾きは場所に依って異なってくる。(この図では点 P の傾きよりも点 Q の傾きの方が大きい。) だから、どの場所での傾きかを指定しなくてはならない。

さらに厄介なのは、図 4 で例示されているように、傾きを単純に「a だけ進んだ時に b だけ上がる」で定義した場合には、a の取り方で結果 (= b/a) が異なることである。

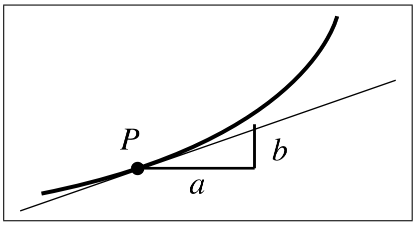

図 5: 曲線の傾きの定義

そこで P での傾きは、図 5 のように、点 P で曲線に接する直線 (点 P における接線) を引いて、その接線の傾きを曲線の傾きであると定義する。(これは実は図 4 において、a をできるだけ小さくとった時の b/a の値である。)

3.2　近似計算法 — ニュートン法 —

放物線 $y = x^2$ を例にとって、ニュートンに依る近似計算法を紹介する。放物線で囲まれた面積を計算する代わりに、図 6 のように、折れ線で囲まれた面積を計算するのである。$0 \le x \le 1$ の区間を 5 分割した場合には折れ線で囲まれた図形は、5 つの台形 (どれも高さ 0.2) である。面積 S は

$$\begin{aligned} S &= 0.2 \times \frac{0.0^2 + 0.2^2}{2} + 0.2 \times \frac{0.2^2 + 0.4^2}{2} + 0.2 \times \frac{0.4^2 + 0.6^2}{2} \\ &+ 0.2 \times \frac{0.6^2 + 0.8^2}{2} + 0.2 \times \frac{0.8^2 + 1.0^2}{2} \end{aligned}$$

である。計算しやすいように、これを変形すると

$$S = 0.2 \times \left\{ \frac{0.0^2}{2} + 0.2^2 + 0.4^2 + 0.6^2 + 0.8^2 + \frac{1.0^2}{2} \right\}$$

となる。

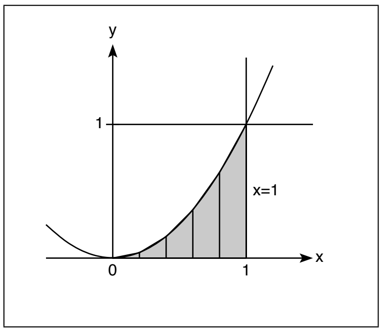

図 6: 折れ線で囲まれた面積